Tripoli university
Faculty of engineering
EE department
EE313/Solution of homeworks

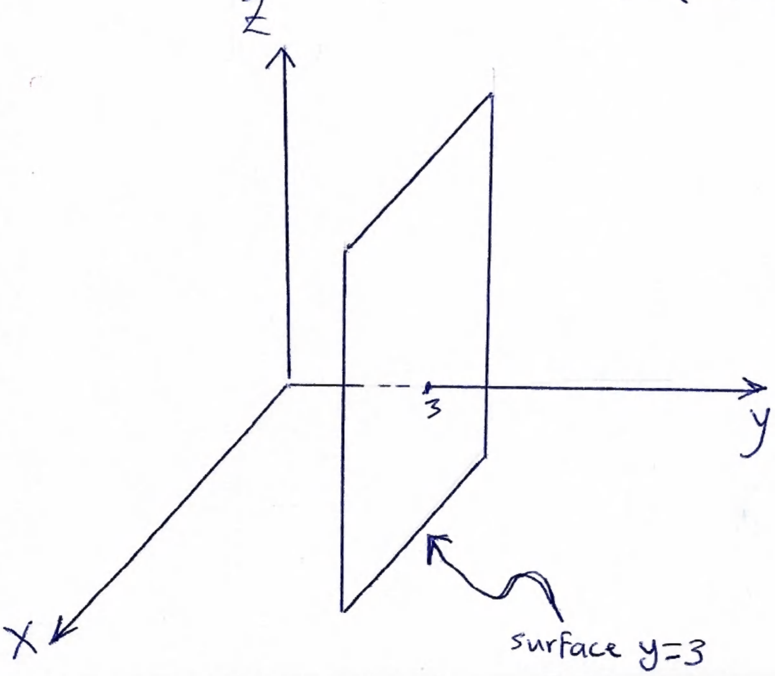
(Fall 2012)

HW#1 (1-5)(1-9)(1-44)

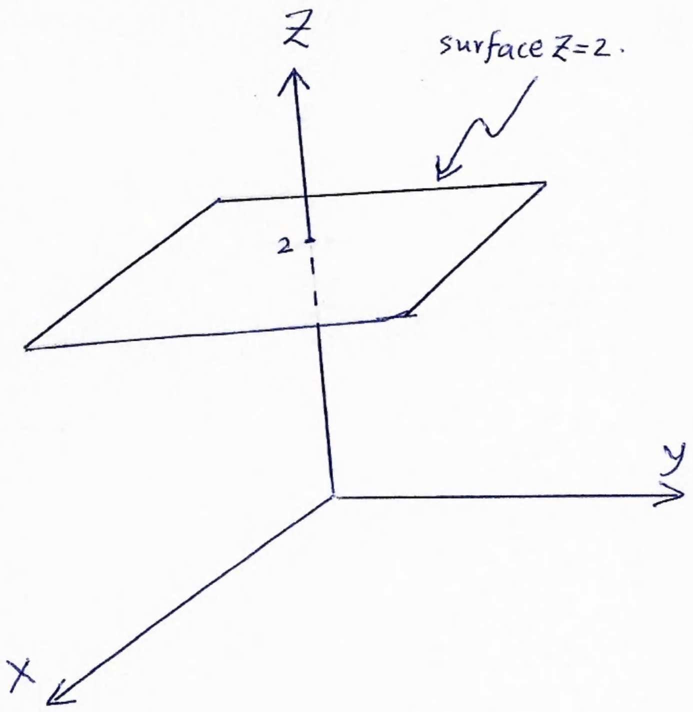
Problem# (1-5)

$G_x = x^2 y z$, $G_y = y - 1$, $G_z = -x z^2$

الخط l المعني في المسألة هو الخط الناتج عن تقاطع السطحين ($y=3$) و ($z=2$) .

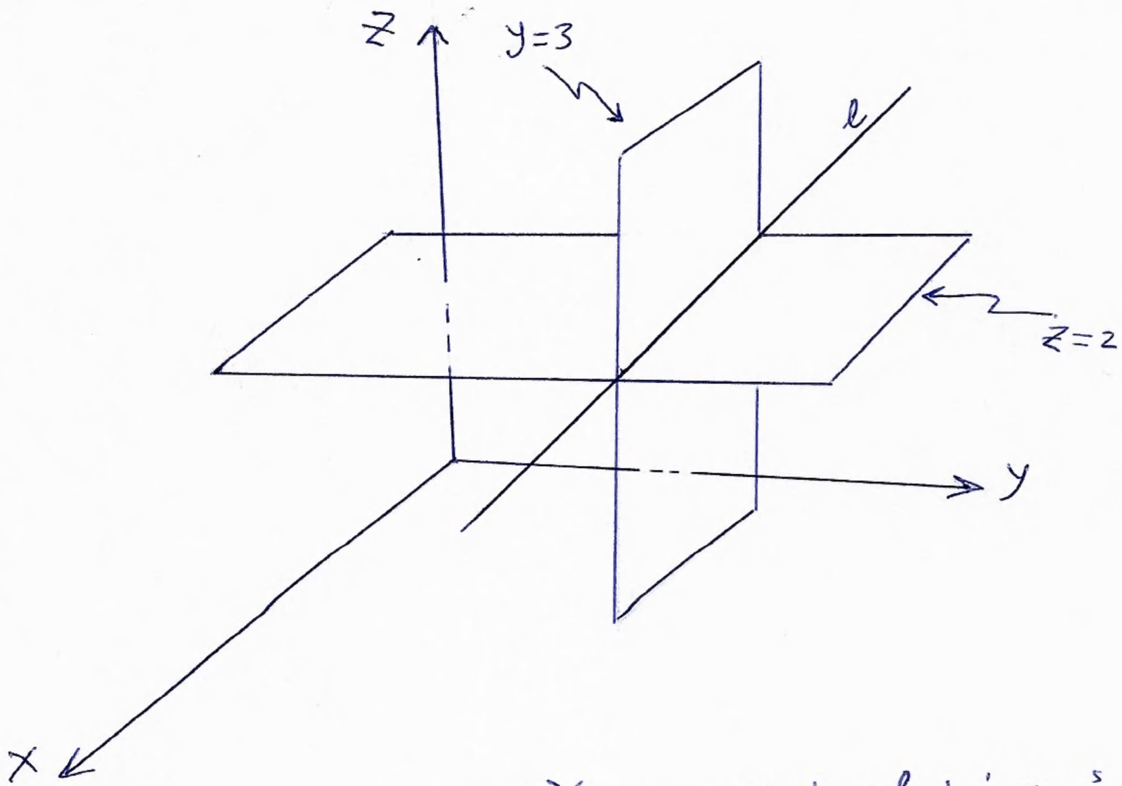


السطح المستوي $y=3$ هو سطح يوازي المستوي xz ويقطع محور y عند النقطة $y=3$.
يمكن القول أيضاً بأن المستوي $y=3$ هو مستوى يكون الاحداثي y لجميع النقط الواقعة عليه يساوي 3 .



السطح المستوي $Z=2$
هو سطح يوازي المستوي
XY ويقطع محور Z عند
النقطة 2 .
ويمكن القول أيضاً بأن المستوي
$Z=2$ هو مستوي يكون الاحداثي
Z لجميع النقط الواقعة عليه
يساوي 2 .

فيكون الخط l الذي هو تقاطع السطحين كما بالشكل :



ولاحظ أن الخط l يوازي محور X .

المجال $\vec{G}$ على طول الخط l هو $\vec{G}(x,3,2)$:-

$$\vec{G}(x,3,2) = x^2(3)(2)\vec{a_x} + (3-1)\vec{a_y} - x(2)^2\vec{a_z}$$

$$= 6x^2\vec{a_x} + 2\vec{a_y} - 4x\vec{a_z}$$

at $x=-2$:

$\vec{G} = 24\vec{a_x} + 2\vec{a_y} + 8\vec{a_z}$, $|\vec{G}| = \sqrt{24^2+2^2+8^2} = 25.4$

at $x=-1$:

$\vec{G} = 6\vec{a_x} + 2\vec{a_y} + 4\vec{a_z}$, $|\vec{G}| = \sqrt{6^2+2^2+4^2} = 7.48$

at $x=0$:

$\vec{G} = 2\vec{a_y}$, $|\vec{G}| = 2$.

at $x=1$:

$\vec{G} = 6\vec{a_x} + 2\vec{a_y} - 4\vec{a_z}$, $|\vec{G}| = \sqrt{6^2+2^2+4^2} = 7.48$

at $x=2$:

$\vec{G} = 24\vec{a_x} + 2\vec{a_y} - 8\vec{a_x}$, $|\vec{G}| = \sqrt{24^2+2^2+8^2} = 25.4$

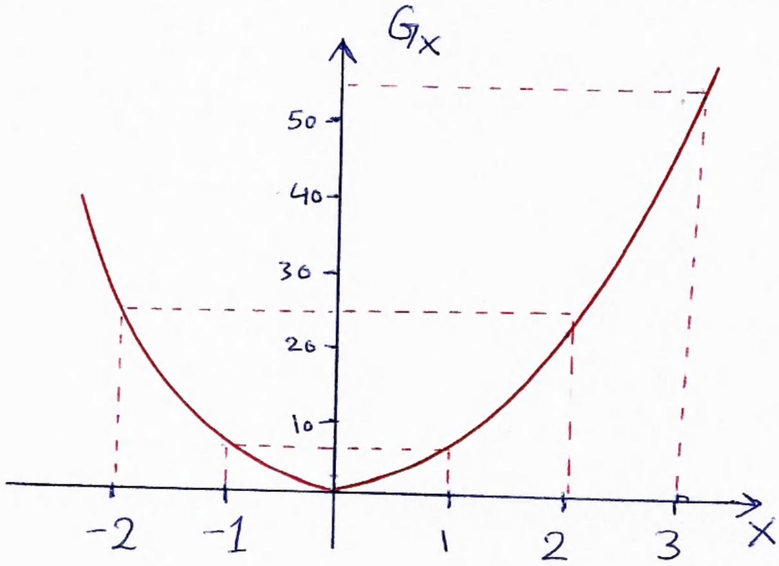
at $x=3$:

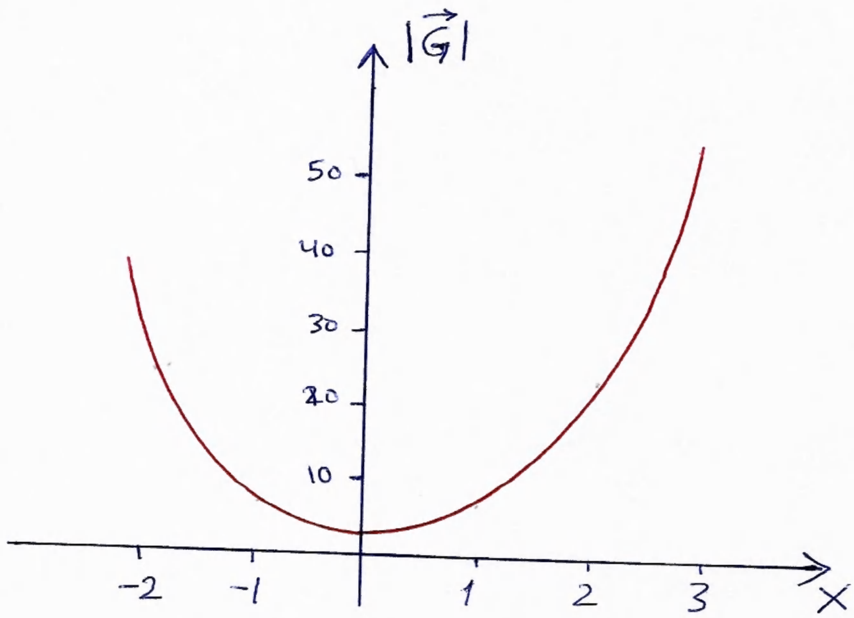
$\vec{G} = 54\vec{a_x} + 2\vec{a_y} - 12\vec{a_z}$, $|\vec{G}| = \sqrt{54^2+2^2+12^2} = 55.35$

يمكننا تلخيص النتائج السابقة في الجدول التالي :-

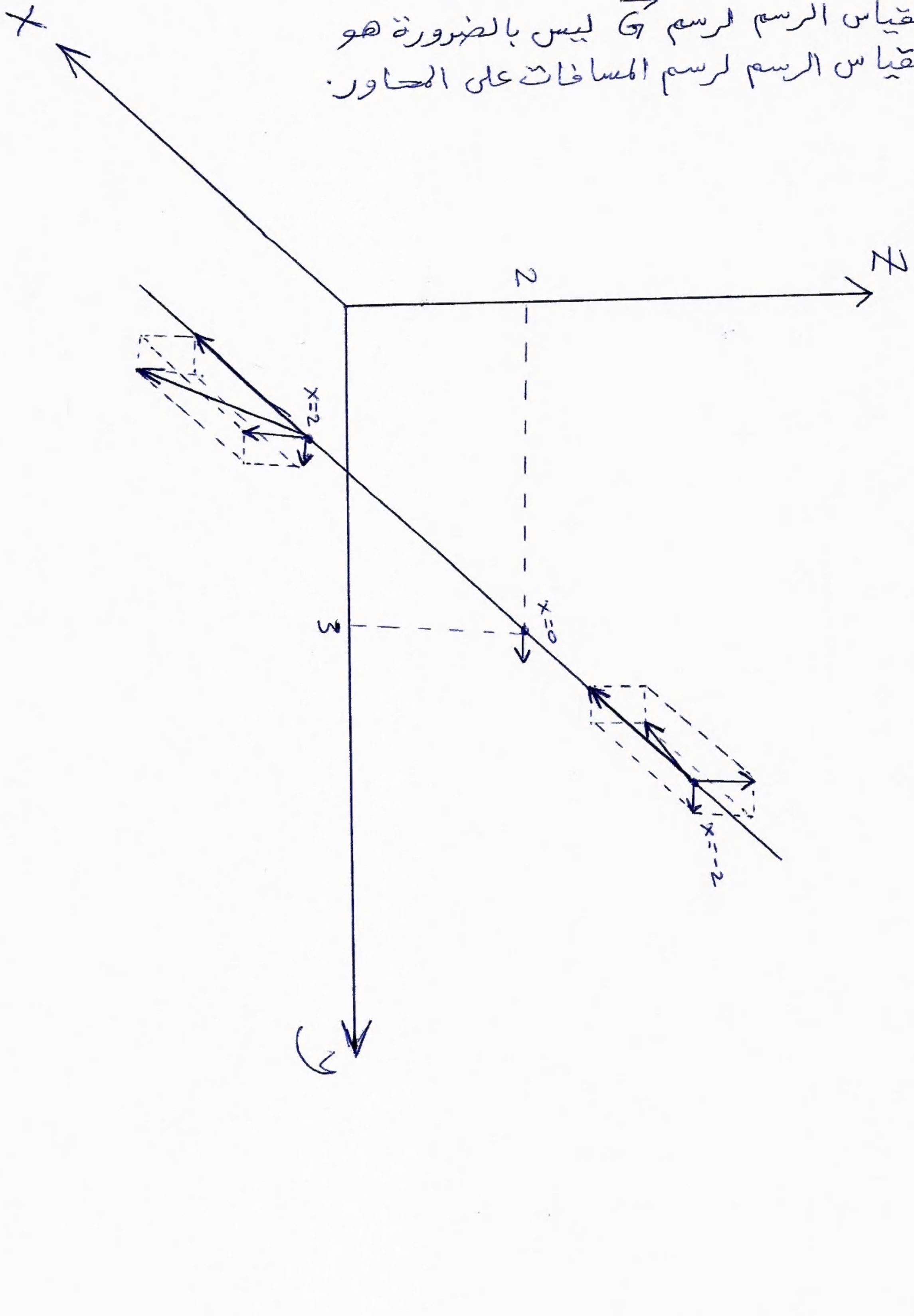
X	-2	-1	0	1	2	3
G_x	24	6	0	6	24	54
$\lvert\vec{G}\rvert$	25.4	7.48	2	7.48	25.4	55.35

ويمكننا رسم G_x و $\lvert\vec{G}\rvert$ كدالة في X كالتالي :





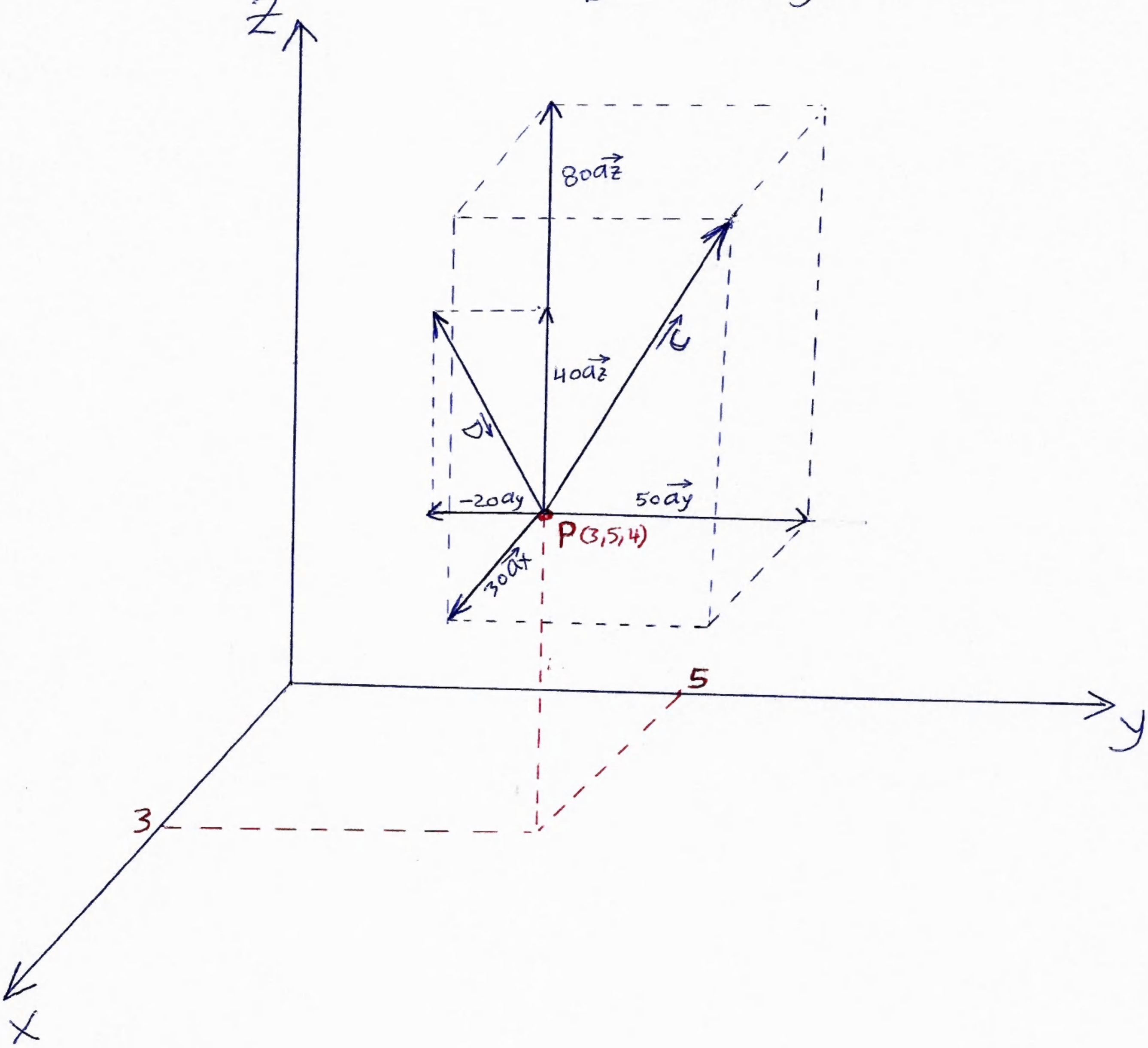
الشكل التالي هو رسم تخطيطي لـ $\vec{G}$ عند
النقط $x=-2$ ، $x=0$ ، $x=2$. ولاحظ أن
مقياس الرسم لرسم $\vec{G}$ ليس بالضرورة هو
مقياس الرسم لرسم المسافات على المحاور.



Problem # (1-9)

a)

$$\vec{C} = 30\vec{a_x} + 50\vec{a_y} + 80\vec{a_z}$$
$$\vec{D} = -20\vec{a_y} + 40\vec{a_z}$$



$$|\vec{C}| = \sqrt{30^2+50^2+80^2} = 99$$
$$|\vec{D}| = \sqrt{20^2+40^2} = 44.7$$

لإيجاد الزاوية بين $\vec{C}$ و $\vec{D}$ يمكن استخدام الضرب القياسي :-

$$\vec{C}\cdot\vec{D} = |\vec{C}||\vec{D}|\cos\theta_{CD} \Rightarrow \theta_{CD} = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{C}\cdot\vec{D}}{|\vec{C}||\vec{D}|}\right)$$

أو استخدام الضرب الاتجاهي :-

$$|\vec{C}\times\vec{D}| = |\vec{C}||\vec{D}|\sin\theta_{CD} \Rightarrow \theta_{CD} = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{C}\times\vec{D}|}{|\vec{C}||\vec{D}|}\right)$$

$$\vec{C}\cdot\vec{D} = 0 + (50)(-20) + (80)(40) = 2200$$

$$\therefore \theta_{CD} = \cos^{-1}\left(\frac{2200}{(99)(44.7)}\right) = 60.2^\circ$$

$$\vec{C}\times\vec{D} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ 30 & 50 & 80 \\ 0 & -20 & 40 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{a}_x(2000+1600) - \vec{a}_y(1200-0) + \vec{a}_z(-600-0)$$

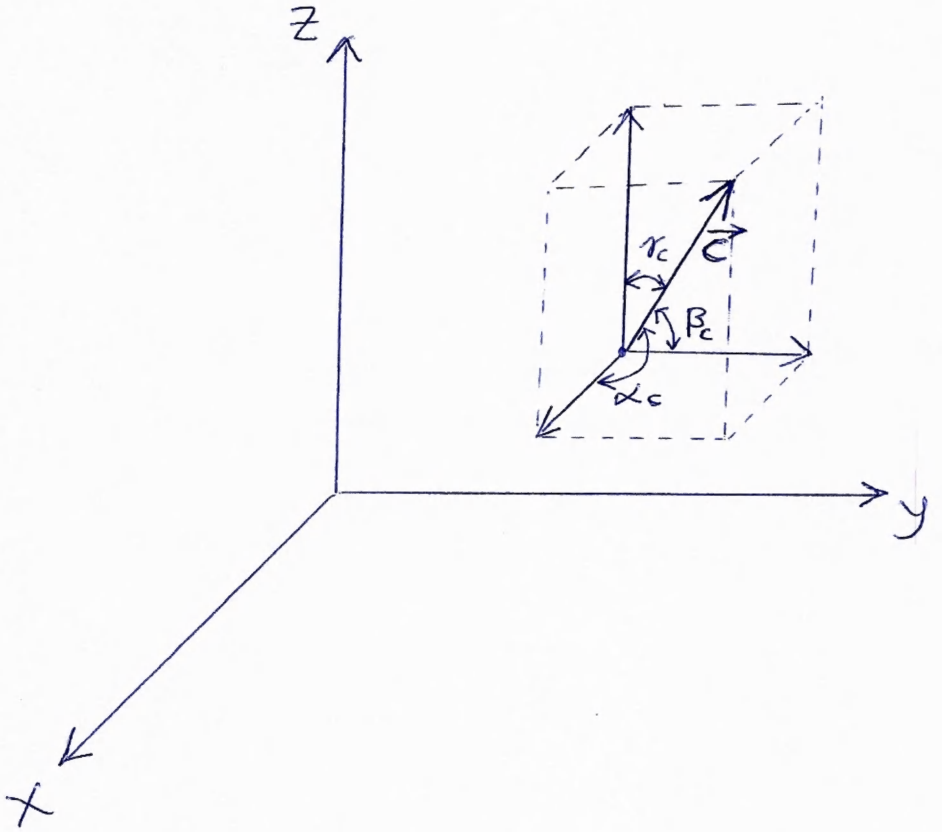
$$= 3600\vec{a}_x - 1200\vec{a}_y - 600\vec{a}_z$$

$$|\vec{C}\times\vec{D}| = \sqrt{3600^2+1200^2+600^2} = 3841.9$$

$$\therefore \theta_{CD} = \sin^{-1}\left(\frac{3841.9}{(99)(44.7)}\right) = 60.2^\circ$$

b)

الزوايا α_c ، β_c ، γ_c مبينة بالشكل التالي :-



$$\vec{C}\cdot\vec{a_x} = C_x = |\vec{C}|\,(1)\cos\alpha_c$$

$$\alpha_c = \cos^{-1}\left(\frac{C_x}{|\vec{C}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{30}{99}\right) = 72.36^\circ$$

$$\vec{C}\cdot\vec{a_y} = C_y = |\vec{C}|\,(1)\cos\beta_c$$

$$\beta_c = \cos^{-1}\left(\frac{C_y}{|\vec{C}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{50}{99}\right) = 59.66^\circ$$

$$\vec{C}\cdot\vec{a_z} = C_z = |\vec{C}|\,(1)\cos\gamma_c$$

$$\gamma_c = \cos^{-1}\left(\frac{C_z}{|\vec{C}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{80}{99}\right) = 36.09^\circ$$

Problem # (1-44)

a)

$$\vec{A} = 10\,\vec{a}_x$$

$$A_r = A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta$$
$$= 10\sin\theta\cos\phi$$

$$A_\theta = A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta$$
$$= 10\cos\theta\cos\phi$$

$$A_\phi = -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi$$
$$= -10\sin\phi$$

$\therefore \vec{A}$ in spherical coordinates:-

$$\vec{A} = 10\sin\theta\cos\phi\,\vec{a}_r + 10\cos\theta\cos\phi\,\vec{a}_\theta - 10\sin\phi\,\vec{a}_\phi$$

b)

$$\vec{E} = 100x\,\vec{a}_y$$

تحويل أي متجه من نظام إحداثيات لآخر يتم على مرحلتين :

أولاً : تحويل المركبات .

ثانياً : تحويل المتغيرات .

$$E_r = E_x \sin\theta\cos\phi + E_y \sin\theta\sin\phi + E_z\cos\theta$$

$$= 100x\sin\theta\sin\phi$$

$$E_\theta = E_x\cos\theta\cos\phi + E_y\cos\theta\sin\phi - E_z\sin\theta$$

$$= 100x\cos\theta\sin\phi$$

$$E_\phi = -E_x\sin\phi + E_y\cos\phi$$

$$= 100x\cos\phi$$

ولكن $x = r\sin\theta\cos\phi$:-

$$E_r = 100r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi$$

$$E_\theta = 100r\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi$$

$$E_\phi = 100r\sin\theta\cos^2\phi$$

$$\vec{E} = \vec{a}_r E_r + \vec{a}_\theta E_\theta + \vec{a}_\phi E_\phi .$$

HW#2 (1-19)(1-27)(1-36)

Problem # (1-19)

a)

المطلوب في الفقرة (a) هو حساب التكامل الخطي لـ $\vec{H}$ بين النقطتين P_1 و P_2 على طول المسار المنحني l والذي هو عبارة عن تقاطع السطحين $x^2+(y-1)^2=1$ و $z=y/2$.

بما أن الخط l هو تقاطع السطحين ، إذاً كلتا معادلتي السطحين تتحققان على طول الخط .

$$\vec{H} = \vec{a_y}\, 3(1-x^2) + \vec{a_z}\, 4y^2$$

$$\vec{dl} = dx\,\vec{a_x} + dy\,\vec{a_y} + dz\,\vec{a_z}$$

$$\vec{H}\cdot\vec{dl} = 3(1-x^2)dy + 4y^2 dz$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_{y=0}^{2} 3(1-x^2)dy + \int_{z=0}^{1} 4y^2 dz$$

لاحظ أنه لإنجاز التكامل فإنه يجب التعويض عن x بدلالة y في التكامل الأول والتعويض عن y بدلالة z في التكامل الثاني.

من معادلة الاسطوانة يمكننا كتابة :-

$$(y-1)^2 = 1-x^2 .$$

ومن معادلة السطح المائل يمكننا كتابة

$$y = 2z .$$

والآن يمكن إعادة كتابة التكامل كالتالي :-

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_{y=0}^{2} 3(y-1)^2 dy + \int_{z=0}^{1} 16 z^2 dz$$

$$= \left[(y-1)^3\right]_0^2 + \left[\frac{16}{3} z^3\right]_0^1$$

$$= \left[(2-1)^3 - (0-1)^3\right] + \left[\frac{16}{3} - 0\right]$$

$$= 1 + 1 + \frac{16}{3} = 7.33$$

b)

المطلوب الآن حساب التكامل الخطي لـ $\vec{H}$ بين نفس النقطتين ولكن مع تغير المسار l الذي هو الآن عبارة عن تقاطع السطحين $x=0$ و $z=y/2$.

$$\vec{H}\cdot\vec{dl} = 3(1-x^2)\, dy + 4y^2 dz$$

وبالتعويض عن x بـ 0 وعن y بـ $2z$:-

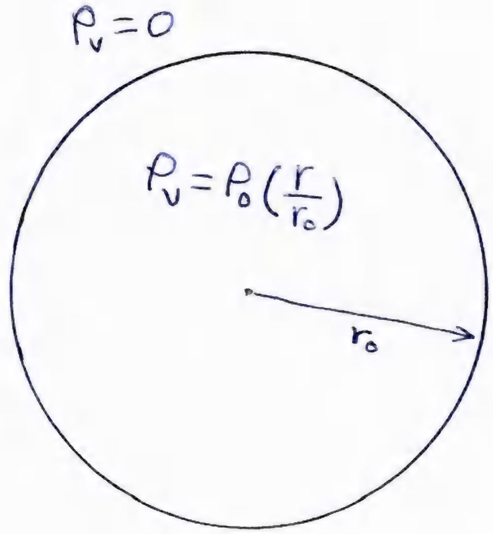
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int_{y=0}^{2} 3\, dy + \int_{z=0}^{1} 16 z^2 dz$$

$$= \left[3y\right]_0^2 + \left[\frac{16}{3} z^3\right]_0^1$$

$$= 6 + \frac{16}{3} = 11.33$$

والآن ، هل $\vec{H}$ مجال محتفظ "Conservative" ؟
الجواب لا . لأن التكامل الخطي لـ $\vec{H}$ بين نقطتين اختلف
باختلاف المسار الرابط بين النقطتين .

Problem # (1-27)



a)

$$Q = \int_v \rho_v \, dv = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r_o} \rho_o\left(\frac{r}{r_o}\right) \underbrace{r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi}_{dv \text{ in spherical system.}}$$

$$= \frac{\rho_o}{r_o}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r_o} r^3 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

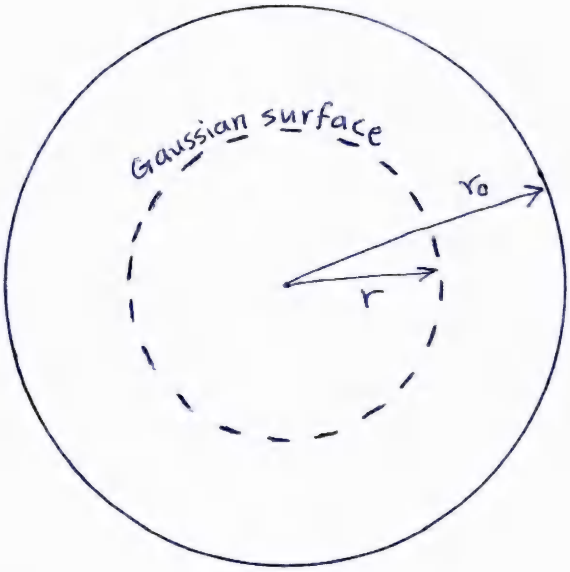
$$= \frac{\rho_o}{r_o}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{r_o}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left[\phi\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\rho_o}{r_o}\left(\frac{r_o^4}{4}\right)(2)(2\pi) = \pi \rho_o r_o^3$$

b)

الآن باستخدام قانون جاوس نريد ايجاد المجال الكهربي داخل وخارج الكرة المشحونة .

① For $r<r_o$:-



$$\oint_S \epsilon_o \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_V \rho_v \, dv$$

$$\underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \epsilon_o \vec{E} \cdot (\vec{a_r}\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi)}_{\text{تكامل } \epsilon_o \vec{E} \text{ على سطح كرة نصف قطرها } r} = \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r} \rho_o \left(\frac{r}{r_o}\right) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi}_{\text{تكامل } \rho_v \text{ داخل حجم كرة نصف قطرها } r}$$

لاحظ أنه من التماثل الكروي للمسألة فإن $\vec{E}$ لا يمكن أن يكون له مركبة إلا في اتجاه $\vec{a_r}$:

$\vec{E} = \vec{a_r} E_r$

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \epsilon_0 E_r\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{\rho_0}{r_0}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r} r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

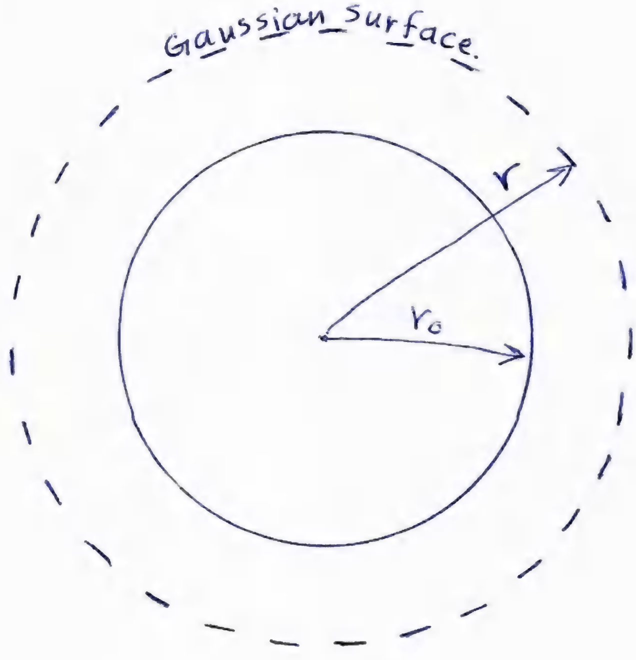
ومن التماثل في المسألة فإن E_r ينبغي أن يكون ثابتاً على كل نقطة على سطح الكرة (لا يتغير بتغير θ أو ϕ) وعلى ذلك يمكن اخراجه من التكامل . أيضاً r على سطح كرة هو ثابت .

$$\epsilon_0 r^2 E_r \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{\rho_0}{r_0}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^r \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \left[\phi\right]_0^{2\pi}$$

$$\epsilon_0 r^2 E_r\, (2)(2\pi) = \frac{\rho_0}{r_0}\left(\frac{r^4}{4}\right)(2)(2\pi)$$

$$\therefore E_r = \frac{\rho_0\, r^2}{4\epsilon_0 r_0}$$

② For $r > r_0$:-



$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \epsilon_o \vec{E}\cdot(\vec{a_r}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi) = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r_o} \rho_o\left(\frac{r}{r_o}\right) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

لاحظ أنه في تكامل ρ_v فإن التكامل ليس داخل كرة نصف قطرها r وإنما r_o وذلك لعدم وجود أي شحنة بعد r_o.

$$\epsilon_o E_r\, r^2 \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{\rho_o}{r_o}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{r_o} r^3 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$\epsilon_o E_r\, r^2 (2)(2\pi) = \frac{\rho_o}{r_o}\left(\frac{r_o^4}{4}\right)(2)(2\pi)$$

$$\therefore E_r = \frac{\rho_o r_o^3}{4\epsilon_o r^2}$$

والآن نريد اثبات أن هذا المجال هو نفسه يمكن الحصول عليه لو كانت شحنة الكرة مركزة في نقطة في مركز الكرة.

$$Q = \pi \rho_o r_o^3 \qquad \text{" from part (a) "}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o r^2}\vec{a_r} \qquad \text{"for point charge".}$$

$$= \frac{\pi \rho_o r_o^3}{4\pi\epsilon_o r^2}\vec{a_r} = \frac{\rho_o r_o^3}{4\epsilon_o r^2} \quad \#$$

c)

$$E_r = \frac{\rho_o r^2}{4\epsilon_o r_o} = \frac{10^{-3}\, r^2}{4\times\frac{10^{-9}}{36\pi}\times 0.1} = 9\pi\times 10^{7}\, r^2 \ \ \text{V/m}$$

(for $(r<r_o)$)

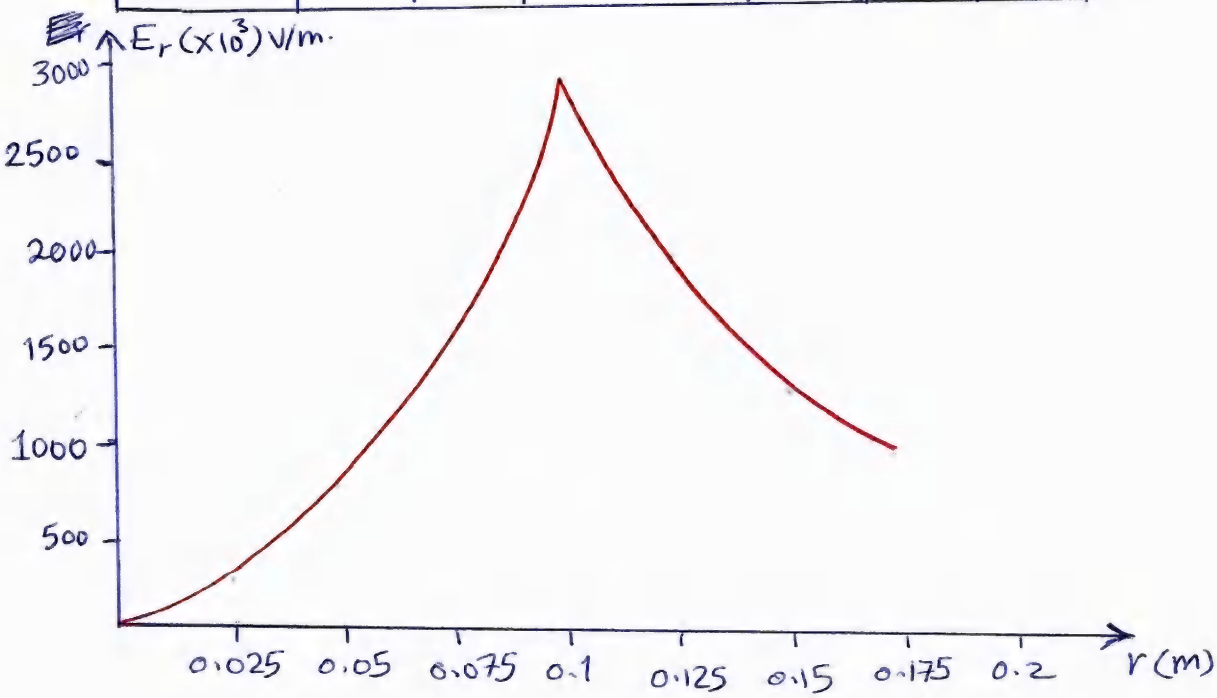
$$E_r = \frac{\rho_o r_o^3}{4\epsilon_o r^2} = \frac{10^{-3} \times (0.1)^3}{4 \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times r^2} = \frac{9\pi \times 10^3}{r^2} \quad (V/m)$$

for $(r > r_o)$

$$E_r = \begin{cases} 9\pi \times 10^7 r^2 & , \ r < 0.1 \\ \frac{9\pi \times 10^3}{r^2} & , \ r > 0.1 \end{cases}$$

ويمكن رسم E_r كدالة في r كالتالي :-

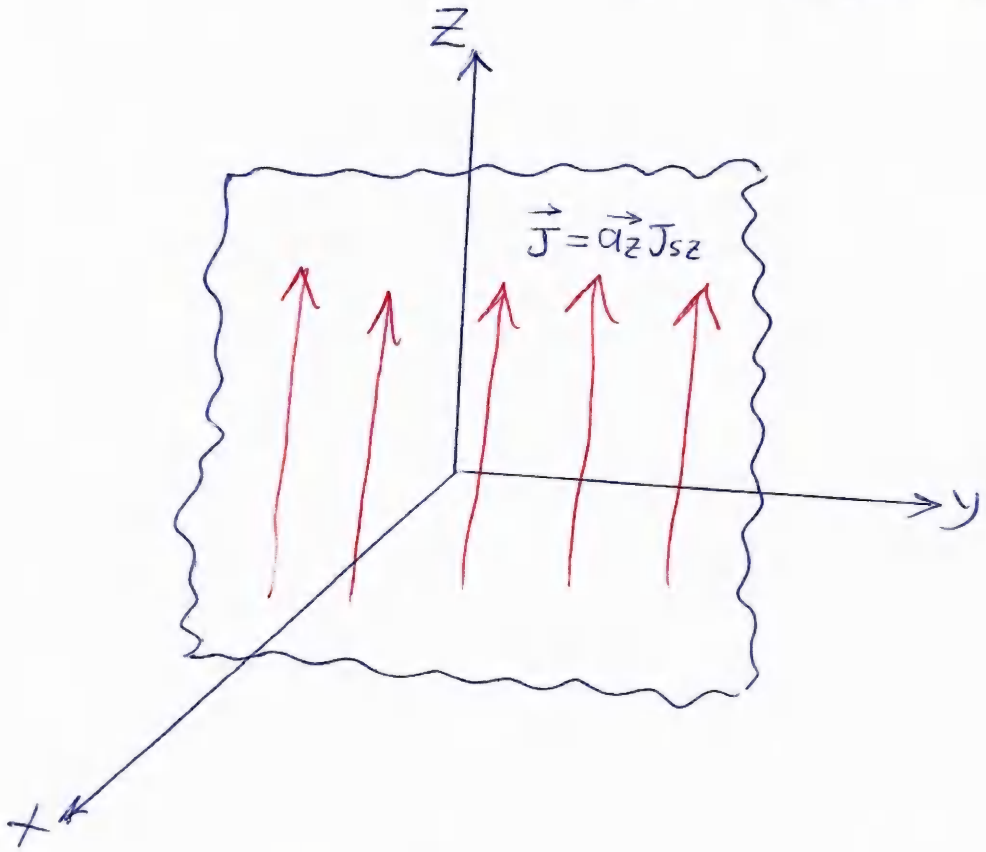
$r(m)$	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175
$E_r(\times 10^3)$	176.25	705	1586	2820	1804	1253	921



$$Q = \pi \rho_o r_o^3 = \pi \times 10^{-3} \times (0.1)^3 = \pi \times 10^{-6} \ C$$

Problem # (1-36)

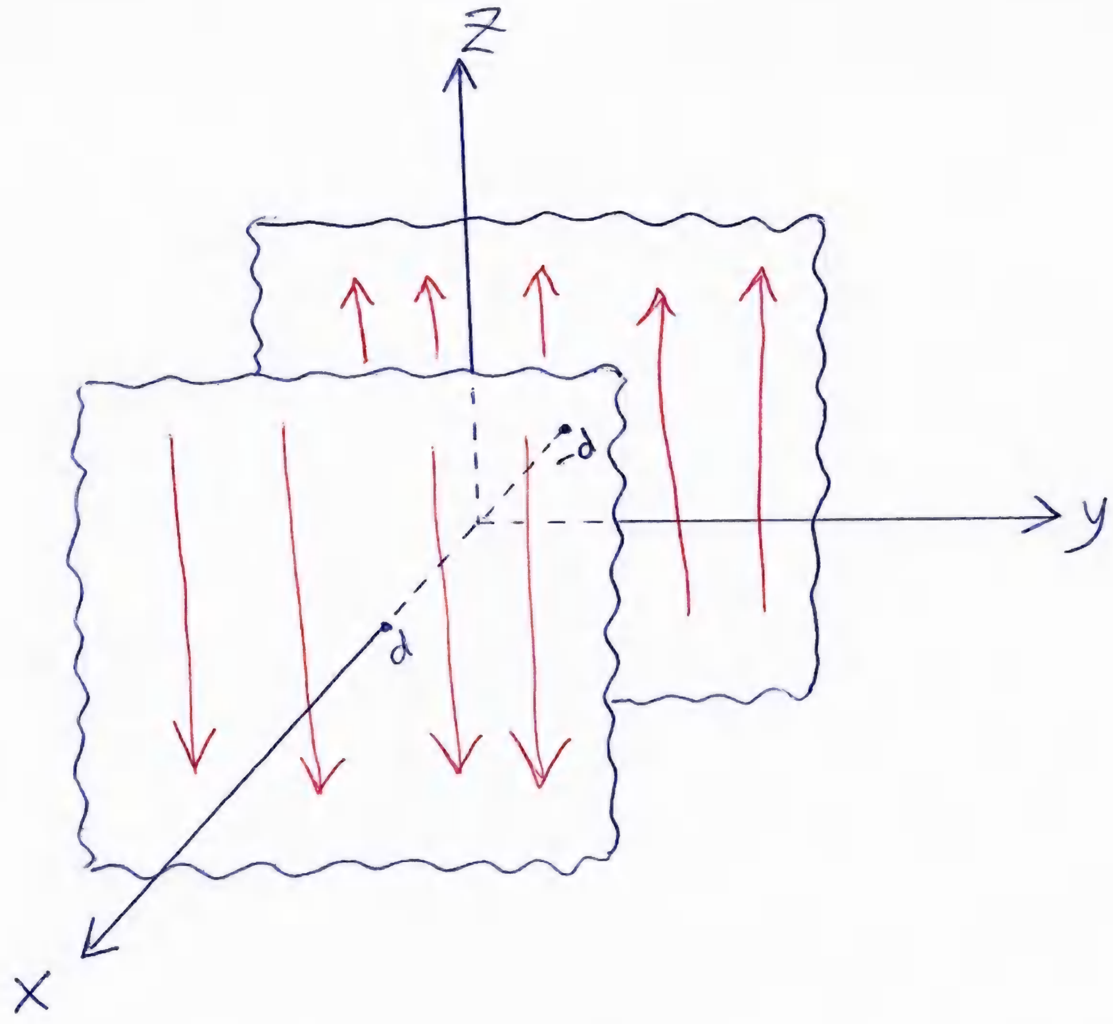
لدينا من المثال (16-1)



$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{a_y} \dfrac{\mu_0 J_{sz}}{2} & , x > 0 \\ -\vec{a_y} \dfrac{\mu_0 J_{sz}}{2} & , x < 0 \end{cases}$$

ولاحظ أن قاعدة اليد اليمنى تعطينا اتجاه المجال المغناطيسي $\vec{B}$ على جانبي اللوح.

والآن، في المسألة لدينا صفيحتان متوازيتان احداهما عند $x=-d$ والأخرى عند $x=d$ ويمر بكل منهما تيار كما بالشكل.



بالنسبة للصفيحة عند x=-d :-

$$\vec{B} = -\vec{a_y}\,\frac{\mu_0 J_{sz}}{2} \quad , \; x < -d$$

$$\vec{B} = \vec{a_y}\,\frac{\mu_0 J_{sz}}{2} \quad , \; x > -d$$

بالنسبة للصفيحة عند x=d :-

$$\vec{B} = \vec{a_y}\,\frac{\mu_0 J_{sz}}{2} \quad , \; x < d$$

$$\vec{B} = -\vec{a_y}\,\frac{\mu_0 J_{sz}}{2} \quad , \; x > d.$$

إذاً تكون لدينا ثلاثة مناطق :-

الأولى $x < -d$:-

يكون المجالان في هذه المنطقة متساويين ومتعاكسين ومحصلتهما صفر.

الثانية $-d < x < d$:-

يكون للمجالين نفس الاتجاه ومحصلتهما :-

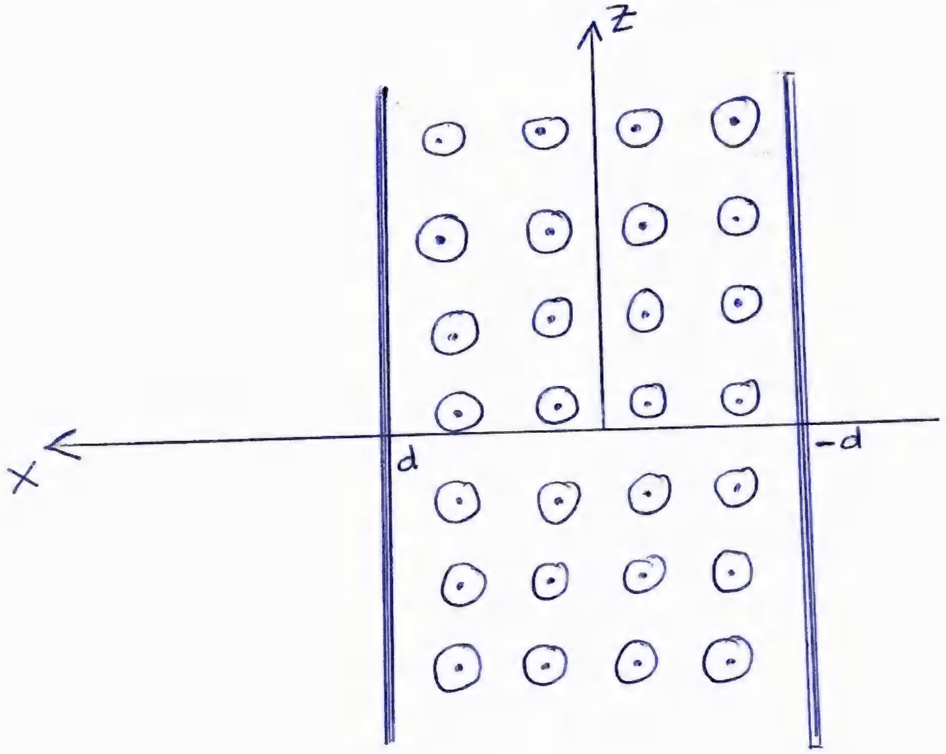
$$\vec{B} = \vec{a}_y \frac{\mu_0 J_{sz}}{2} + \vec{a}_y \frac{\mu_0 J_{sz}}{2} = \vec{a}_y \mu_0 J_{sz}$$

الثالثة $x > d$:-

يكون المجالان متساويين ومتعاكسين ومحصلتهما صفر.

b)

بالنظر بشكل موازي للمستوي yz نرسم خطوط فيض المجال المغناطيسي كما بالشكل. ولاحظ أن خطوط المجال متوازية وموزعة بكثافة متساوية.



For $J_{sz} = 100\, A/m$:

$$B = \mu_0 J_{sz} = 4\pi \times 10^{-7} \times 100 = 0.1257\, mWb/m^2$$

c)

إذا كان كلا التيارين في اتجاه $+\vec{a}_z$ فإنه وباتباع أسلوب مماثل
لما سبق يمكن اثبات أن المجال ينعدم بين الصفيحتين ويجمع
خارج الصفيحتين.

HW #3 (2-8)(2-15)(2-29)(2-41)

Problem # (2-8)

a) $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(3) + \frac{\partial}{\partial y}(4) = 0$

$\therefore$ The vector field $\vec{A}$ has no flux sources.

b) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(3xz) + \frac{\partial}{\partial y}(4xy) + \frac{\partial}{\partial z}(5x^2+y)$

$= 3z + 4x$.

$\therefore$ The vector field $\vec{F}$ has a flux source.

c) $\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \frac{\partial}{\partial x}(3y) + \frac{\partial}{\partial y}(4z) + \frac{\partial}{\partial z}(5x^2+y) = 0.$

$\therefore$ $\vec{G}$ has no flux source.

d) $\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \frac{\partial}{\partial x}(6x) + \frac{\partial}{\partial y}(6y) + \frac{\partial}{\partial z}(6z)$

$= 6 + 6 + 6 = 18.$

and in spherical system:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{H} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(6r\,r^2) = \frac{18r^2}{r^2} = 18.$$

e) $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(5\rho^2 z\sin\phi) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}(10\rho z\cos\phi)$

$= \frac{1}{\rho}(10\rho z\sin\phi) - \frac{1}{\rho}(10\rho z\sin\phi) = 0$

$\therefore$ $\vec{J}$ has no flux sources.

f) $\vec{\nabla}\cdot\vec{K} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(100) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{20}{r}\sin\theta\right)$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(10r\cos\phi)$$

$$= 0 + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{20}{r}\cos\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}(-10r\sin\phi)$$

$$= \frac{20}{r^2}\cot\theta - 10\frac{\sin\phi}{\sin\theta}$$

$\therefore \vec{K}$ has a flux source.

$\boxed{\text{Problem \#(2-15) (2-29)}}$ Solved in the tutorial.

$\boxed{\text{Problem \#(2-41)}}$

a)

Amplitude : 1885 V/m

Direction of travel : +z direction.

Polarization : x polarized.

b) $E_x^+(z,t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{E}_x^+(z)\, e^{j\omega t}\right\}$

$$= \mathrm{Re}\left\{1885\, e^{-j\beta_0 z}\, e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{1885\, e^{j(\omega t - \beta_0 z)}\right\}$$

$$E_x^+(z,t) = Re\left\{1885\left(\cos(\omega t-\beta_o z)+j\sin(\omega t-\beta_o z)\right)\right\}$$

$$= 1885\cos(\omega t-\beta_o z) \quad V/m.$$

$$\beta_o = \omega\sqrt{\mu_o\epsilon_o} = 2\pi \times 100\times 10^6 \times \sqrt{4\pi\times 10^{-7}\times 8.854\times 10^{-12}}$$

$$= 2.096 \ \ rad/m$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_o} = 3m.$$

c)

$$\hat{B}_y^+(z) = \frac{\hat{E}_x^+(z)}{c} = \frac{1885e^{-j\beta_o z}}{3\times 10^8} = 6.28\times 10^{-6}\, e^{-j\beta_o z}$$

$$\hat{H}_y^+(z) = \frac{\hat{E}_x^+(z)}{\eta_o} = \frac{1885e^{-j\beta_o z}}{120\pi} = 5e^{-j\beta_o z} \quad A/m.$$

$$H_y^+(z,t) = Re\left\{5e^{-j\beta_o z}\, e^{j\omega t}\right\}$$

$$= 5\cos(\omega t-\beta_o z).$$

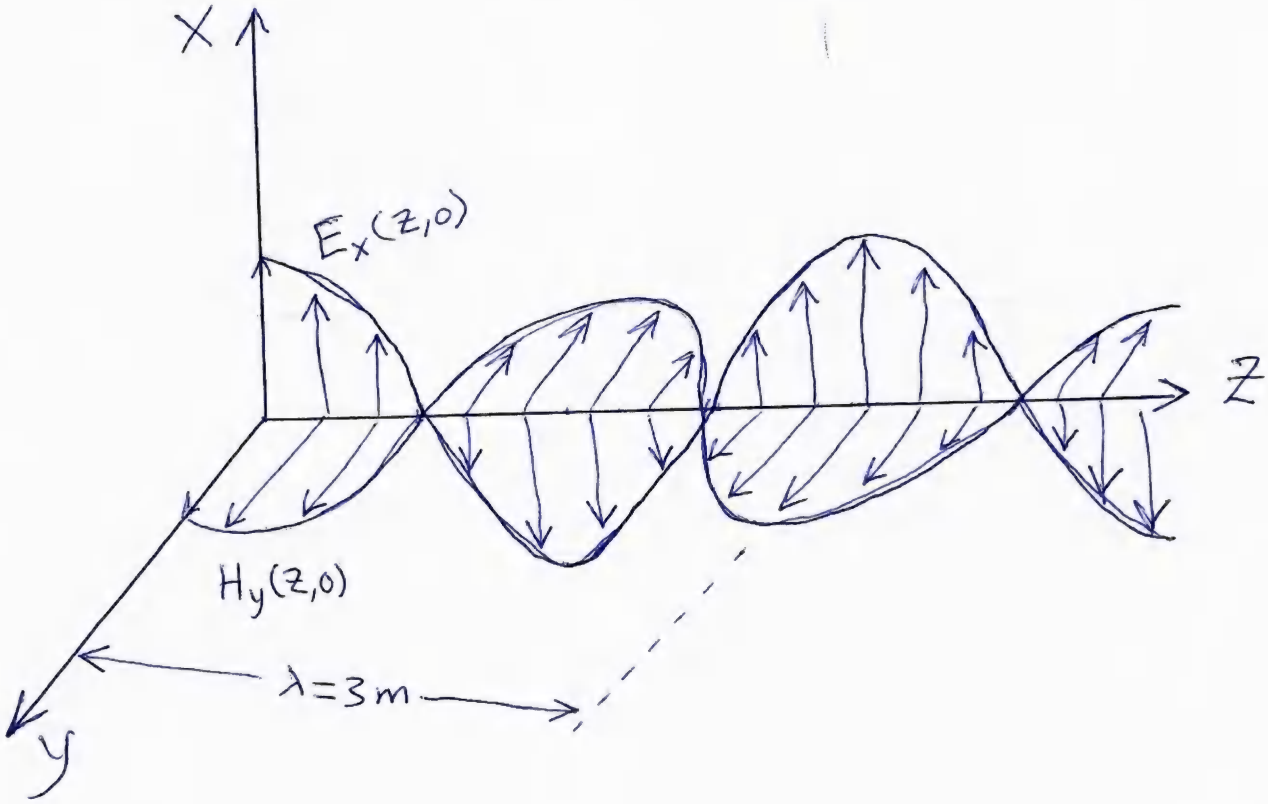
$$= 5\cos(2\pi\times 10^8 t - 2.096z) \quad V/m.$$

d)

at $t=0$:-

$$E_x^+(z,t=0) = 1885\cos(\beta_o z)$$

$$H_y^+(z,t=0) = 5\cos(\beta_o z)$$


X
$E_x(z,0)$
Z
$H_y(z,0)$
$\lambda = 3m$
y

HW#4 (3-1)(3-11)(3-28)(3-31)

Problem # (3-1)

$n = 10^{29}\ m^{-3}$, $\sigma = 5.8\times10^{7}\ S/m$

$$\sigma = ne\mu_e \Rightarrow \mu_e = \frac{\sigma}{ne} = \frac{5.8\times10^{7}}{10^{29}\times1.6\times10^{-19}} = 3.625\times10^{-3}\ m^2/V.sec$$

$$\rho_v = ne = 10^{29}\,m^{-3}\times1.6\times10^{-19}\,C\times\left(\frac{1\ m}{10^{3}\ mm}\right)^3 = 16\ C/mm^3$$

$$\vec{v}_d = -\mu_e\vec{E} = -3.625\times10^{-3}\,\vec{a}_x\ m/s = -3.625\,\vec{a}_x\ mm/sec.$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = 5.8\times10^{7}\,\vec{a}_x\ A/m^2 = 58\ A/mm^2.$$

$\vec{V}_d$ تكون عكس اشارة $\vec{E}$ لأن الالكترونات في مجال كهربي تتحرك
عكس اتجاه المجال . أيضاً اتجاه $\vec{J}$ عكس اتجاه $\vec{V}_d$ لأن $\vec{J}$
يمثل تيار شحنات موجبة بينما حاملات الشحنه الحرة هي الالكترونات
سالبة الشحنة .

Problem # (3-11)

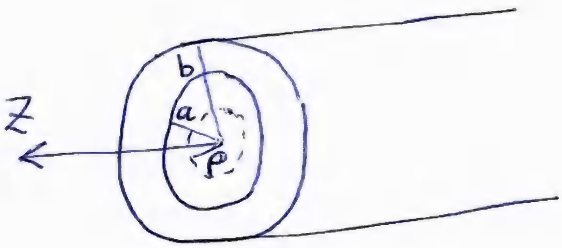
solved in the tutorial.

Problem #(3-28)

a)

① For $\rho<a$:

$$\oint_l \vec{H}\cdot\vec{dl} = \int \vec{J}\cdot\vec{ds}$$



where $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{a_z}$

$$\int_0^{2\pi} \vec{H_\phi}\vec{a_\phi}\cdot\rho d\phi\vec{a_\phi} = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho} \frac{I}{\pi a^2}\vec{a_z}\cdot\rho d\rho d\phi\vec{a_z}$$

$$2\pi\rho H_\phi = \frac{I}{\pi a^2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{\rho}\rho d\rho d\phi$$

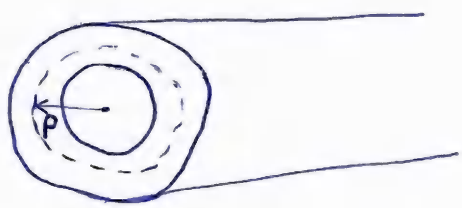
$$2\pi\rho H_\phi = \frac{I}{\pi a^2}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)(2\pi)$$

$$\therefore H_\phi = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

$$B_\phi = \mu_0 H_\phi = \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}$$

② For $a<\rho<b$:-

$$\oint_l \vec{H}\cdot\vec{dl} = I$$



$$\int_0^{2\pi} H_\phi \vec{a_\phi} \cdot \rho d\phi \vec{a_\phi} = I$$

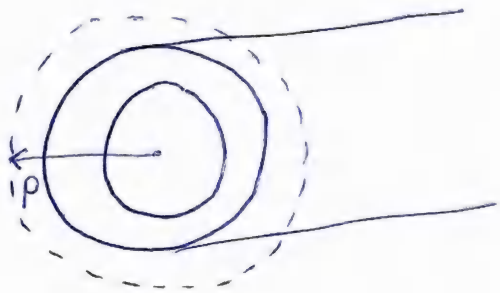
$$2\pi\rho H_\phi = I$$

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \quad , \quad B_\phi = \mu H_\phi = \frac{\mu I}{2\pi\rho}.$$

(3) For $\rho > b$:

The same H_ϕ.

But $B_\phi = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$



b)

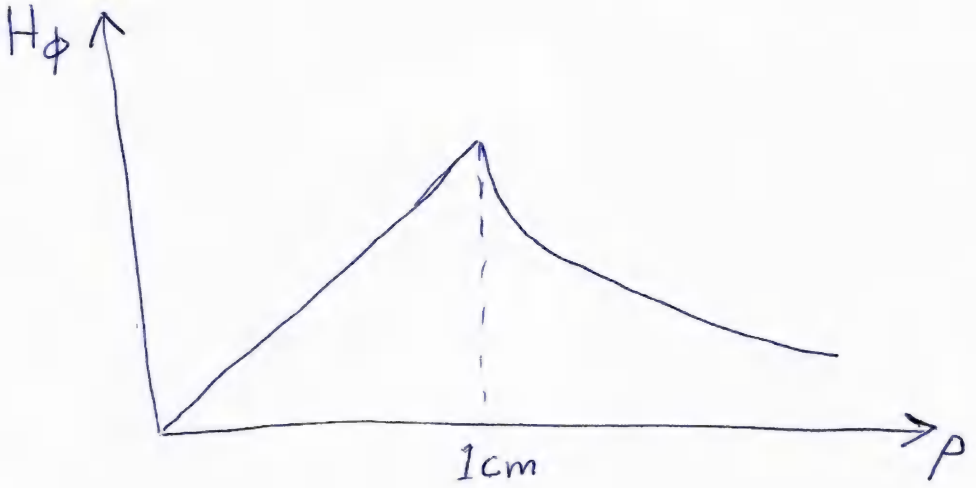
$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H}$$

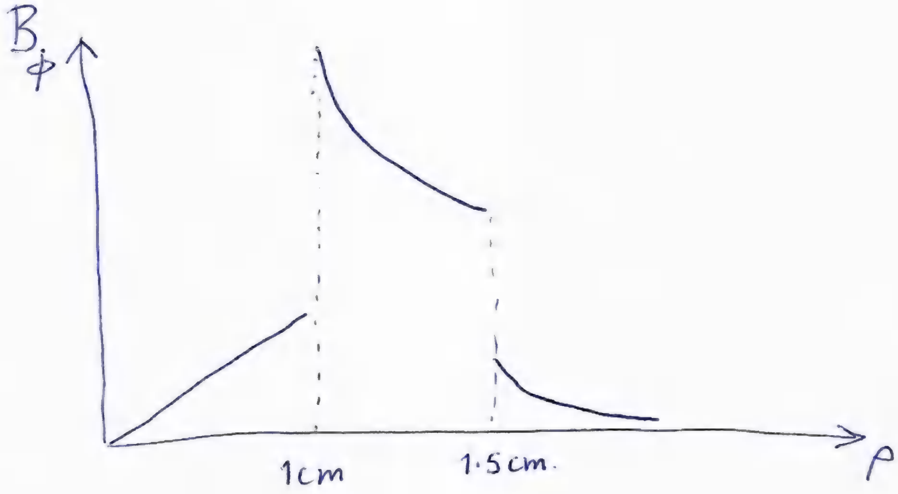
$$= \frac{\mu_r I}{2\pi\rho} - \frac{I}{2\pi\rho} = \frac{I(\mu_r - 1)}{2\pi\rho} = \frac{\chi_m I}{2\pi\rho}$$

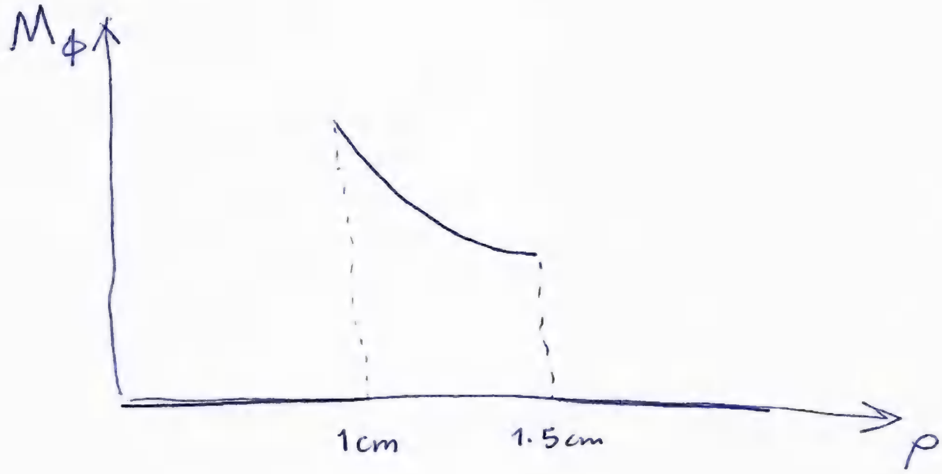
For $I = 628\,A$, $a = 1cm$, $b = 1.5cm$, $\mu_r = 6$.

$$H_\phi = \begin{cases} 10^6 \rho & \rho < a \\ \dfrac{10^2}{\rho} & , \rho > a. \end{cases}$$

$$B_\phi = \begin{cases} 0.4\pi\rho & \rho < a \\ \dfrac{24\pi \times 10^{-5}}{\rho} & a < \rho < b \\ \dfrac{4\pi \times 10^{-5}}{\rho} & \rho > b. \end{cases}$$







لاحظ أن المركبات المماسية لـ $\vec{H}$ مستمرة "Continuous" على الأسطح الفاصلة بين المناطق وذلك ما يجب أن يكون .

$$\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{a}_\rho}{\rho} & \vec{a}_\phi & \frac{\vec{a}_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho\left(\frac{\chi_m I}{2\pi\rho}\right) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وعلى السطح الداخلي للمادة المغناطيسية $(\vec{n} = -\vec{a}_\rho)$:-

$$\vec{J}_{sm} = -\vec{n} \times \vec{M} = \vec{a}_\rho \times \vec{a}_\phi \left.\frac{\chi_m I}{2\pi\rho}\right|_{\rho=a} = \vec{a}_z \frac{\chi_m I}{2\pi a}$$

وعلى السطح الخارجي للمادة المغناطيسية $(\vec{n} = \vec{a}_\rho)$:-

$$J_{sm} = -\vec{n} \times \vec{M} = -\vec{a}_\rho \times \vec{a}_\phi \left.\frac{\chi_m I}{2\pi\rho}\right|_{\rho=b} = -\vec{a}_z \frac{\chi_m I}{2\pi b}$$

Problem # (3-31)

$\mu = \mu_0$, $\epsilon = 6\epsilon_0$, $\sigma = 10^{-2}$, $f = 100\,MHz$.

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\left(\epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)} \longrightarrow \text{equation (3-88)}$$

$$= j2\pi \times 10^8 \times \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times \left(8.854 \times 10^{-12} \times 6 - j\frac{10^{-2}}{2\pi \times 10^8}\right)}$$

$$= j2\pi \times 10^8 \times \sqrt{6.676 \times 10^{-17} - j2 \times 10^{-17}}$$

$$\gamma = j2\pi \times \sqrt{0.676 - j0.2}$$

$$= j2\pi \times \sqrt{0.697\ e^{-j16.7^\circ}}$$

وحيث أن :-

$$\boxed{\left(re^{j\theta}\right)^n = r^n\, e^{jn\theta}}$$

$$\gamma = j2\pi \times \left(0.835\, e^{-j8.333}\right)$$

$$= 0.76 + j5.19 = \alpha + j\beta$$

$$\therefore \alpha = 0.76\ Np/m \quad , \quad \beta = 5.19\ rad/m.$$

b)

$$\alpha = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} = 0.76\ Np/m.$$

$$\beta = \frac{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]^{\frac{1}{2}} = 5.19\ rad/m$$

HW#5 (4-2) (4-15) (4-9) (4-23)

Problem # (4-2)

a)

$$\vec{E} = \frac{10^{-6}\left[(0-0)\vec{a_x} + (3-0)\vec{a_y} + (5-1)\vec{a_z}\right]}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times \left(\sqrt{(0-0)^2+(3-0)^2+(5-1)^2}\right)^3}$$

$$= \frac{9\times10^3\,(3\vec{a_y}+4\vec{a_z})}{125} = 216\vec{a_y} + 288\vec{a_z}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{216^2+288^2} = 360 \text{ V/m.}$$

$$\vec{F} = q'\vec{E} = 0.216\times10^{-3}\,\vec{a_y} + 0.288\times10^{-3}\,\vec{a_z} \text{ N}$$

b)

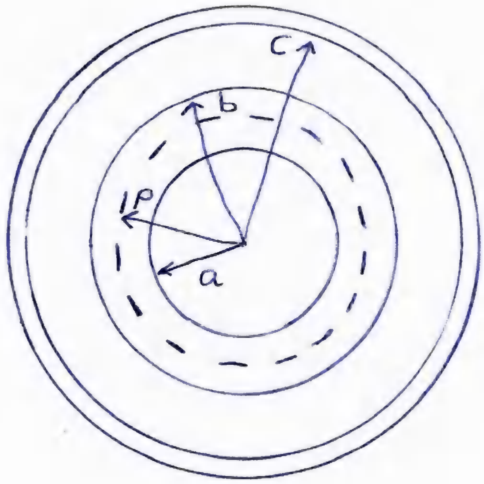
$$\vec{E} = \frac{10^{-6}\,(3\vec{a_y} - \vec{a_z})}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times (9+1)^{3/2}} = 853.8\vec{a_y} - 284.6\vec{a_z} \text{ V/m.}$$

c)

$$\vec{E} = \frac{10^{-6}\,(-\vec{a_z})}{4\pi \times \frac{10^{-9}}{36\pi} \times 1} = -9000\vec{a_z} \text{ V/m.}$$

Problem # (4-9)

For $a < \rho < b$:



$$\oint_s \vec{D} \cdot \vec{ds} = Q$$

$$\int_{z=0}^{\ell} \int_{\phi=0}^{2\pi} D_\rho \vec{a_\rho} \cdot \rho \, d\phi \, dz = Q$$

$$2\pi \rho \ell D_\rho = Q$$

$$\therefore \vec{D} = \vec{a_\rho} \frac{Q}{2\pi \rho \ell}.$$

ونفس النتيجة سنحصل عليها في المنطقة $b < \rho < c$.

For $a<\rho<b$: $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\epsilon_1} = \vec{a_\rho} \dfrac{Q}{2\pi \epsilon_1 \rho \ell} = \vec{a_\rho} \dfrac{k}{\epsilon_1 \rho}$

For $b<\rho<c$: $\vec{E} = \dfrac{\vec{D}}{\epsilon_2} = \vec{a_\rho} \dfrac{Q}{2\pi \epsilon_2 \rho \ell} = \vec{a_\rho} \dfrac{k}{\epsilon_2 \rho}$

where $k = \dfrac{Q}{2\pi \ell}$

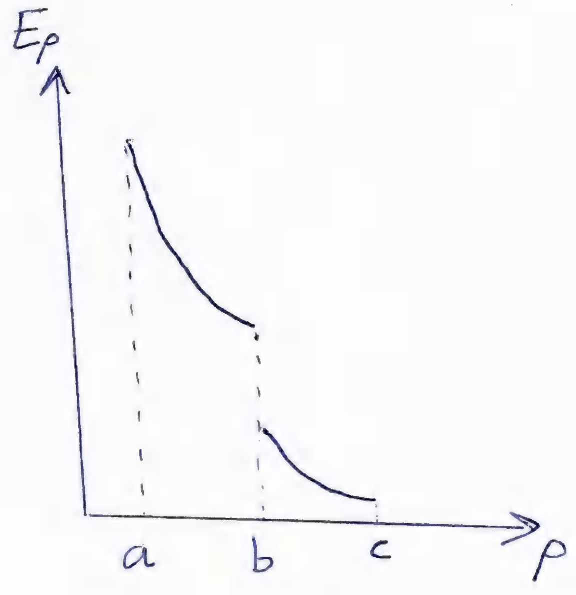
b)

For $\epsilon_1 = \frac{1}{2}\epsilon_2$: $E_\rho = \dfrac{2k}{\epsilon_2 \rho}$ $\quad a<\rho<b$

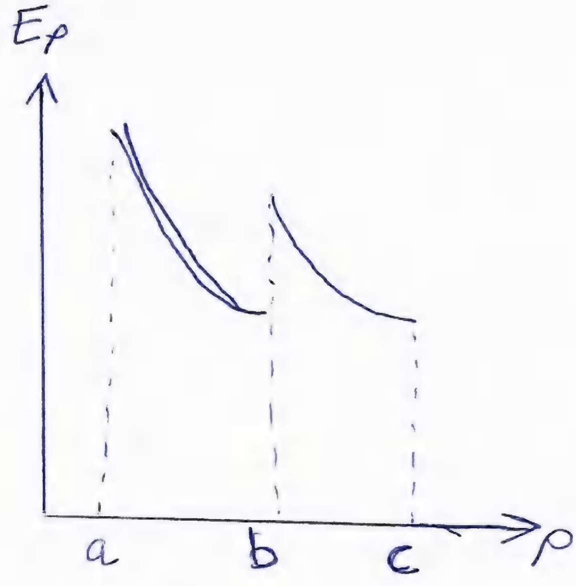
$E_\rho = \dfrac{k}{\epsilon_2 \rho}$ $\quad b<\rho<c$

For $\epsilon_1 = 2\epsilon_2$: $E_\rho = \dfrac{k}{2\epsilon_2 \rho}$ $\quad a<\rho<b$

$E_\rho = \dfrac{k}{\epsilon_2 \rho}$ $\quad b<\rho<c$.



$$\epsilon_1 = \tfrac{1}{2}\epsilon_2$$



$$\epsilon_1 = 2\epsilon_2$$

من الواضح أن $\epsilon_1 = 2\epsilon_2$ هو الأقرب لجعل متوسط E_ρ متقارباً في المنطقتين .

Problem # (4-15)

في المثال (4-9) تحصلنا على المجال الكهربي بين الموصلين :-

$$\vec{E} = \vec{a}_\rho \frac{q}{2\pi\epsilon\rho l}$$

من المعادلة (4-38a) وبجعل النقطة التي يكون جهدها مرجعياً عند $\rho = b$:-

$$\Phi(\rho) = -\int_b^\rho \vec{a}_\rho \frac{q}{2\pi\epsilon\rho l} \cdot \vec{a}_\rho \, d\rho$$

$$\Phi(\rho) = -\frac{q}{2\pi\epsilon l}\int_b^{\rho}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$= -\frac{q}{2\pi\epsilon l}\left[\ln\rho - \ln b\right]$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{b}{\rho}\right).$$

وإذا جعلنا $\rho = a$ (أي على سطح الموصل الداخلي) فإن الجهد $\Phi(a)$
هو فرق الجهد بين الموصلين V.

$$V = \Phi(a) = \frac{q}{2\pi\epsilon l}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

b)

من المعادلة السابقة يمكن كتابة :

$$q = 2\pi\epsilon l V / \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

وبالتعويض في معادلة $\Phi(\rho)$:-

$$\Phi(\rho) = \frac{2\pi\epsilon l \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) V}{2\pi\epsilon l \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ln\left(\frac{b}{\rho}\right)$$

c)

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

والسعة لكل وحدة طول :-

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi \times 2 \times 8.854 \times 10^{-12}}{\ln(5)} = 69\ pF/m.$$

$$\vec{E}(\rho) = -\vec{\nabla}\Phi(\rho) = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ln\left(\frac{b}{\rho}\right)\right)\vec{a_\rho}$$

$$= -\frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{-\frac{b}{\rho^2}}{\frac{b}{\rho}}\vec{a_\rho} = \frac{V}{\rho\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\vec{a_\rho}$$

For $V = 100V$, $a = 2cm$, $b = 10\ cm$, $\epsilon_r = 2$:-

$$\Phi(\rho) = 62.13\ln\left(\frac{0.1}{\rho}\right)$$

$$E(\rho) = \frac{62.13}{\rho}$$

من معادلة $\Phi(\rho)$:-

$$\ln\left(\frac{0.1}{\rho}\right) = \frac{\Phi}{62.13}$$

$$\frac{0.1}{\rho} = e^{\frac{\Phi}{62.13}}$$

$$\therefore \rho = 0.1\, e^{-\frac{\Phi}{62.13}}$$

For $\Phi = 0$: $\rho = 0.1m = 10cm.$

For $\Phi = 25V$: $\rho = 6.7\ cm.$

For $\Phi = 50V$: $\rho = 4.5\ cm.$

For $\Phi = 75V$: $\rho = 3\ cm.$

For $\Phi = 100V$: $\rho = 2cm.$

Problem # (4-23)

a)

$$V = -\int_{c}^{a} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\int_{c}^{b} \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 \rho l} d\rho - \int_{b}^{a} \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 \rho l} d\rho$$

$$= -\frac{Q}{2\pi l}\left[\frac{1}{\epsilon_2}\int_{c}^{b}\frac{d\rho}{\rho} + \frac{1}{\epsilon_1}\int_{b}^{a}\frac{d\rho}{\rho}\right]$$

$$= -\frac{Q}{2\pi l}\left[\frac{1}{\epsilon_2}\ln\left(\frac{b}{c}\right) + \frac{1}{\epsilon_1}\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$= Q\left[\frac{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi\epsilon_2 l} + \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\epsilon_1 l}\right]$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\frac{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi\epsilon_2 l} + \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\epsilon_1 l}}$$

وبمقارنة هذه النتيجة بالمعادلة (4-51) وحيث أنه
لمكثفين متصلين على التوالي فإن $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}$ ، إذاً
يمكن اعتبار المكثف في المسألة مكثفين اسطوانيين على التوالي.

b)

For $a < \rho < b$:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{l}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b} \frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{Q}{2\pi l}\right)^2 \frac{1}{\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$U_e = \frac{1}{2\epsilon_1}\left(\frac{Q}{2\pi l}\right)^2 \left(2\pi l \ln\left(\frac{b}{a}\right)\right)$$

$$= \frac{Q^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{4\pi\epsilon_1 l}$$

For $b<\rho<c$:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{z=0}^{l}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=b}^{c} \frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{Q}{2\pi l}\right)^2 \frac{1}{\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$= \frac{Q^2 \ln\left(\frac{c}{b}\right)}{4\pi\epsilon_2 l}$$

The total stored energy:-

$$U_e = \frac{Q^2}{2}\left[\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\epsilon_1 l} + \frac{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi\epsilon_2 l}\right]$$

ومن المعادلة $(4-63c)$:-

$$C = \frac{1}{\dfrac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\epsilon_1 l} + \dfrac{\ln\left(\frac{c}{b}\right)}{2\pi\epsilon_2 l}}$$

م/ عبدالله عياد أبوقرين .
خريف 2012.